ÁLGEBRA DE BOOLE

El Algebra de Boole es importante pues permite representar matemáticamente el funcionamiento de los circuitos digitales. Los circuitos digitales son capaces de permanecer en 2 estados, a saber, encendido y apagado, presencia o ausencia de energía. Estos dos estados son representados matemáticamente por los valores 1 y 0.

1.- Postulados de HUNTINGTON

Para sustentar la estructura algebraica propuesta por Boole y definir las operaciones entre los elementos del álgebra, es necesario establecer una serie de postulados básicos.

Un conjunto de postulados fue propuesto por Huntington en 1904, que definen básicamente la relación de equivalencia, y las operaciones de unión, intersección y complementación y sus propiedades

- **Equivalencia y sus propiedades**

Existe un conjunto N de n elementos sujetos a una relación de equivalencia representada por el símbolo "=", la cual satisface las siguiente propiedades.

Nombre de la Propiedad	Significado
Reflexiva	a = a
Simétrica	a = b entonces b = a
Transmutativa	Si a = b y b = c, entonces a = c
Sustitución	Si a = b, entonces a puede reemplazarse por b en cualquier parte de una expresión, sin cambiar la validez de la expresión

- **Definición de operación Unión e Intersección**

Se defina la operación "UNION " representada por el símbolo "**+**" tal que:

$$\text{Si } a \text{ y } b \in N \text{ entonces } a+b \in N$$

Se define la operación "INTERSECCIÓN" representada por el símbolo "*****" tal que:

$$\text{Si } a \text{ y } b \in N \text{ entonces } a*b \in N$$

- **Definición de elemento neutro de la unión y elemento neutro en la intersección.**

(a) Existe un elemento “0” en N tal que:

$$\text{Si } a \in N \quad \text{entonces} \quad a + 0 = a$$

(b) Existe un elemento “1” en N tal que:

$$\text{Si } a \in N \quad \text{entonces} \quad a * 1 = a$$

- **Propiedades de la Unión y la Intersección .**

Si a, b, c $\in$ N entonces

Nombre Propiedad	Unión	Intersección
Conmutativa	a + b = b+a	a*b = b*a
Distributiva	a + (b *c) = (a + b) (a+c)	a * (b + c) = (a * b) + (a * c)

- **Existencia del complemento y sus propiedades.**

Si a $\in$ N entonces existe un elemento a’ (no a, complemento de a) $\in$ N tal que

$$a * a' = 0$$
$$a + a' = 1$$

- **Cantidad mínima de elementos del conjunto N**

Existen por lo menos 2 elementos a y b $\in$ N tales que $a \neq b$.

Observación importante: Es posible verificar que el conjunto N = {0 ,1} cumple con los postulados de HUNTINGTON.

2.- Definiciones.

- **Expresión de conmutación:** Esta formada por variables, constantes, y operaciones entre ellas. Estas expresiones dependiendo del valor que asuman las variables pueden tener unvalor final 1 ó 0.

- **Variables:** En las expresiones del álgebra de Boole las variables se representan con letras minúsculas generalmente, y estas pueden tomar cualquier valor del conjunto, en este caso pueden tener valor 0 ò 1.

- **Constante:** La aparición de un elemento del conjunto en una expresión. En este caso las constantes son el 0 ó el 1.

- **Literal:** Se define como **literal** la ocurrencia de una variable o su complemento en una expresión.

$$a' + a + b * c + b' * (d + e)$$

5 variables: a, b, c, d, e
7 literales

- **Equivalencia:** Dos expresiones son equivalentes, si para los mismos valores de sus variables, ambas expresiones arrojan el mismo resultado.

- **Complemento:** Una expresión es complemento de la otra si para los mismos valores de sus variables una resulta “1” y la otra resulta “0”

Para obtener el complemento de una expresión se deben seguir los siguientes pasos

(a) Cambiar “+” por “*” y viceversa.
(b) Cambiar “1” por “0” y viceversa.
(c) Complemetar cada literal : Cambiar a por a’ y viceversa.

$$[x + (y' * z)]' = x' * (y + z')$$

- **Dual:** El dual de una expresión se obtiene siguiendo los siguientes pasos

(a) Cambiar “+” por “*” y viceversa.
(b) Cambiar “1” por “0” y viceversa.

$$\text{Dual } (a * a' = 0) \Rightarrow a + a' = 1$$

Observación importante: Si una expresión es valida su dual también lo es.

3.- Lemas del álgebra de Boole.

Su demostración se puede realizar utilizando los postulados de HUNTINGTON

Lema Nº1: Los elementos 0 y 1 son únicos.

Lema Nº2: Para cada elemento $a \in N$ se tiene:

$$a + a = a \qquad y \qquad a * a = a$$

Lema Nº3: Para todo elemento $a \in N$ se tiene:

$$a + 1 = 1 \qquad y \qquad a * 0 = 0$$

Lema Nº4: Los elementos 0 y 1 son distintos y sus complementos también lo son.

$$0 \neq 1 \quad y \qquad 0' \neq 1'$$
$$1 \neq 0$$

Lema Nº5 (Propiedad de Absorción) : Para todo elemento a y $b \in N$ se tiene:

$$a + a*b = a \qquad y \qquad a * (a + b) = a$$

Lema Nº6: El complemento de un elemento $a \in N$ es unico.

Lema Nº7: Para cada elemento $a \in N$, el complemento del complemento de a , es igual al mismo elemento a.

$$(a')' = a$$

Lema Nº8 (Generalización propiedad de Absorción) : Si $a , b , c \in N$ se tiene que:

$$a + [(a * b) *c] = a \qquad y \qquad a * [(a + b)+ c] = a$$

4.- Teoremas del álgebra de boole.

La utilidad de los teoremas del álgebra de Boole es la reducción de expresiones de conmutación.

Para a, b y c $\in$ N se tienen los siguientes teoremas:

Teorema Nº1 (Propiedad Asociativa).

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Teorema Nº2.

$$a + (a' * b) = a + b$$
$$a * (a' + b) = a * b$$

Teorema Nº3.

$$a * b + a * b' = a$$
$$(a + b) * (a + b') = a$$

Teorema Nº4 (Leyes de Morgan).

$$(a + b)' = a' * b'$$
$$(a * b)' = a' + b'$$

Teorema Nº5.

$$a * b + a' * c + b* c = a * b + a' * c$$
$$(a + b) * (a' + c) * (b +c) = (a + b) * (a' + c)$$

Teorema Nº6 (Propiedad de Transposición).

$$a * b + a' c = (a + c) (a' + b)$$

Teorema Nº7 (Expansión de Shanon).

Toda función de n variables puede ser escrita de la siguiente forma

$$f(x1,x2, ... , xn) = x1 * f(1,x2, ... ,xn) + x1' * f(0,x2, ... , xn)$$
$$f(x1,x2, ... , xn) = [x1 + f(0,x2, ... ,xn)] * [x1' + f(1,x2, ... , xn)]$$

5.- Formas canónicas de las expresiones de conmutación.

5.1 Forma canónica suma de productos (F.C.S.P).

Utilizando el teorema de expansión de SHANON en su forma de suma, para una función f de n variables se tiene que:

Toda función de n variables puede ser escrita de la siguiente forma

$$f(x1,x2, \ldots , xn) = x1 * f(1,x2, \ldots , xn) + \overline{x1} * f(0,x2, \ldots , xn)$$

Para una función f de dos variables se tiene:

$f(x1,x0) = x1 * f(1,x0) + \overline{x1} * f(0,x0)$
$f(x1,x0) = x1* \{ x0*f(1,1) + \overline{x0}*f(1,0) \} + \overline{x1} * \{ x0*f(0,1)+ \overline{x0}*f(0,0) \}$
$f(x1,x0) = x1*x0 *f(1,1) + x1* \overline{x0}*f(1,0) + \overline{x1}*x0 *f(0,1) + \overline{x1}*x0'*f(0,0)$

Ordenando

$f(x1,x0) = \overline{x1}\ \overline{x0}*f(0,0) + \overline{x1}\ x0 *f(0,1)+ x1\ \overline{x0} *f(1,0) + x1\ x0 *f(1,1)$

Los f(0,0) , ... , f(1,1) pueden ser 0s o 1s dependiendo de la función, por lo tanto desaparecerán de la sumatoria los productos cuyo valor de f sea 0.

Se llama **FORMA CANONICA SUMA DE PRODUCTOS F.C.S.P.** a una sumatoria de productos, en el que en cada producto intervienen todas las variables de la función.

Se llama **MINITERMINO** a un término de la F.C.S.P, por lo que en cada minitermino intervienen todas las variables de la función.

La F.C.S.P. es una sumatoria de miniterminos de la siguiente forma

Para una función de 2 variables x_1 y x_0

$$f(x1,x0) = \overline{x}1\ \overline{x}0 * f(0,0) + \overline{x}1\ x0 * f(0,1) + x1\ \overline{x}0 * f(1,0) + x1\ x0 * f(1,1)$$
$$= m0 * a0 + m1 * a1 + m2 * a2 + m3 * a3$$

Para una función de n variables x_{n-1} ...x_0

$$f(x_{n-1}, \ldots , x_1, x_0) = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i * a_i$$

5.2 Forma canónica producto de sumas (F.C.P.S.).

Utilizando el teorema de expansión de SHANON en su forma de producto, para una función f de n variables se tiene que :

Toda función de n variables puede ser escrita de la siguiente forma

$$f(x1,x2, ... , xn) = [x1 + f(0,x2, ... ,xn)] * [\overline{x}1 + f(1,x2, ... , xn)]$$

Para una función f de dos variables se tiene:

$$f(x1,x0) = (x1 + f(0,x0)) (\overline{x}1 + f (1,x0))$$

$$f(x1,x0) = \{x1 + (x0 + f(0,0)) (\overline{x}0 + f(0,1))\}\{ \overline{x}1+(x0 + f(1,0)) (\overline{x}0 + f(1,1))\}$$

$$f(x1,x0) = (x1+x0+f(0,0)) (x1+ \overline{x}0+f(0,1)) (\overline{x}1+x0+f(1,0)) (\overline{x}1+ \overline{x}0+f(1,1))$$

Los f(0,0) , ... , f(1,1) pueden ser 0s o 1s dependiendo de la función, por lo tanto desaparecerán de la productoria las sumatorias cuyo valor de f sea 1.

Se llama **FORMA CANONICA PRODUCTOS DE SUMAS F.C.P.S.** a una productoria de sumas, en la que en cada suma intervienen todas las variables de la función.

Se llama **MAXITERMINO** a una sumatoria de la F.C.P.S., por lo que en cada maxitermino intervienen todas las variables de la función.

La F.C.P.S. es una productoria de maxiterminos de la siguiente forma

Para una función de 2 variables x_1 y x_0

$$f(x1,x0) = (x1+x0+f(0,0))\,(x1+\overline{x}0+f(0,1))\,(\overline{x}1+x0+f(1,0))\,(\overline{x}1+\overline{x}0+f(1,1))$$

$$= (M0 + f(0,0))\quad (M1+f(0,1))\quad (M2 + f(1,0))\quad (M3 + f(1,1))$$

$$= (M0 + A0)\quad (M1+A1)\quad (M2 + A2)\quad (M3 + A3)$$

Para una función de n variables x_{n-1} ...x_0

$$f(x_{n-1},\ldots,x1,x0) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (Mi + Ai)$$

6 Simplificación de expresiones de conmutación.

6.1 Conceptos.

Las expresiones de conmutación se implementan físicamente en circuitos digitales. Mientras más complejas son las expresiones de conmutación que resuelven un problema en forma teórica, más complejas serán las implementaciones circuitales. Lo anterior es posible pues las operaciones realizadas en el álgebra de Boole tienen su similar en circuitos digitales que realizan la misma función. Por ejemplo una multiplicación de variables corresponde físicamente a un circuito multiplicador, una suma de varias variables corresponde a un circuito sumador.

Es importante tener en cuenta que es necesario simplificar las expresiones, de manera que la expresión luego del proceso de simplificación sea más sencilla, y los circuitos digitales que participan en la implementación sean mínimos.

Simplificar una expresión de conmutación significa encontrar una expresión más sencilla, que a los mismos valores de las variables de entrada, se obtenga el mismo resultado que al evaluar la expresión más compleja.

La simplificación de expresiones de conmutación se realiza mediante la aplicación sistemática de los teoremas de Boole, es decir, se trabaja algebraicamente con las expresiones de conmutación, hasta llegar a una expresión reducida, en el mejor de los casos la expresión mínima.

La simplificación mediante los teoremas de Boole no asegura llegar a la expresión mínima, pues depende de la habilidad de la persona en la aplicación de los teoremas.

Por lo anterior se han buscado métodos para sistematizar la operación de simplificación, que garantice llegar a una expresión mínima.

(i) Mapas de KARNAUGH
(ii) Métodos de Quine-McClusky

Ambos métodos se basan en la aplicación del siguiente teorema:

$$a * b + a * \overline{b} = a * (b + \overline{b}) = a$$

Es posible simplificar términos que se diferencien en la ocurrencia de una variable. En el caso anterior los términos se diferencian en la ocurrencia de b y $\overline{b}$.

6.2 Método de karnaugh.

Consiste en la representación de una tabla de verdad de una función de conmutación en una tabla en que sus variables de entrada se escriban en un código adyacente.

6.2.1 Mapa de Karnaugh para dos variables.

Una función de n variables tiene hasta 2^n miniterminos $m_0, ..., m_{2^n-1}$ ponderados por coeficientes a_i de $a_0, ... , a_{2^n-1}$

Los $a_0, ... , a_{2^n-1}$ corresponden a los valores de la función f

Para 2 variables x1 , x0 se tiene:

- f tiene 2^2 mimiterminos ponderados
- f(x1,x0) = m0*a0+m1*a1+m2*a2+m3*a3

Tabla de verdad

x1 x0	f(x1,x0)
0 0	a0
0 1	a1
1 0	a2
1 1	a3

Mapa de Karnaugh

	x0	
x1	0	1
0	a0	a1
1	a2	a3

En cada campo del mapa de Karnaugh se escribe la ponderación del minitermino.

- Ejemplo: Encontrar el mapa de Karnaugh de la siguiente función

Tabla de verdad

x1 x0	f(x1,x0)
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Mapa de Karnaugh

	x0	
x1	0	1
0	0	1
1	1	1

6.2.2 Mapa de Karnaugh para tres variables

La función f tiene 2^3 miniterminos ponderados.

f(x2,x1,x0) = m0*a0+m1*a1+m2*a2+m3*a3+m4*a4+m5*a5+m6*a6+m7*a7

Tabla de verdad

X2 x1 x0	f(x2,x2,x0)
0 0 0	a0
0 0 1	a1
0 1 0	a2
0 1 1	a3
1 0 0	a4
1 0 1	a5
1 1 0	a6
1 1 1	a7

Mapa de Karnaugh

	x1 x0			
x2	00	01	11	10
0	a0	a1	a3	a2
1	a4	a5	a7	a6

Ejemplo : Encontrar el mapa de Karnaugh para la siguiente función de tres variables

$f(x,y,z) = \bar{x}\,y + x\,\bar{y}\,\bar{z}$

$f(x,y,z) = \bar{x}\,y(z + \bar{z}) + x\,\bar{y}\,\bar{z} = \bar{x}\,y\,z + \bar{x}\,y\,\bar{z} + x\,\bar{y}\,\bar{z}$

Mapa de Karnaugh

	y z			
X	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	0

6.2.3 Mapa de Karnaugh para cuatro variables.

La función f tiene 2^4 miniterminos ponderados.

f(x3,x2,x1,x0) = m0*a0+m1*a1+m2*a2+m3*a3+m4*a4+m5*a5+m6*a6 + m7*a7+ m8*a8 +m9*a9+ m10*a10+ m11*a11+m12*a12+m13*a13+m14*a14+m15*a15

Tabla de verdad

x3 x2 x1 x0	f(x3,x2,x1,x0)
0 0 0 0	a0
0 0 0 1	a1
0 0 1 0	a2
0 0 1 1	a3
0 1 0 0	a4
0 1 0 1	a5
0 1 1 0	a6
0 1 1 1	a7
1 0 0 0	a8
1 0 0 1	a9
1 0 1 0	a10
1 0 1 1	a11
1 1 0 0	a12
1 1 0 1	a13
1 1 1 0	a14
1 1 1 1	a15

Mapa de Karnaugh

	x1 x0			
x3 x2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	a0	a1	a3	a2
0 1	a4	a5	a7	a6
1 1	a12	a13	a15	a14
1 0	a8	a9	a11	a10

Ejemplo : Encontrar el mapa de Karnaugh de la siguiente función

$f(x,y,z,w) = xy + \bar{x}\, z\, w + \bar{x}\, y\, \bar{z}\, w$

Mapa de Karnaugh

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	1	0
0 1	0	1	1	0
1 1	1	1	1	1
1 0	0	0	0	0

6.2.4 Mapa de Karnaugh para cinco variables

La función f tiene 2^5 miniterminos ponderados.

Tabla de verdad

x4 x3 x2 x1 x0	f(x3,x2,x1,x0)
0 0 0 0 0	a0
0 0 0 0 1	a1
0 0 0 1 0	a2
0 0 0 1 1	a3
0 0 1 0 0	a4
0 0 1 0 1	a5
0 0 1 1 0	a6
0 0 1 1 1	a7
0 1 0 0 0	a8
0 1 0 0 1	a9
0 1 0 1 0	a10
0 1 0 1 1	a11
0 1 1 0 0	a12
0 1 1 0 1	a13
0 1 1 1 0	a14
0 1 1 1 1	a15

x4 x3 x2 x1 x0	f(x3,x2,x1,x0)
1 0 0 0 0	a16
1 0 0 0 1	a17
1 0 0 1 0	a18
1 0 0 1 1	a19
1 0 1 0 0	a20
1 0 1 0 1	a21
1 0 1 1 0	a22
1 0 1 1 1	a23
1 1 0 0 0	a24
1 1 0 0 1	a25
1 1 0 1 0	a26
1 1 0 1 1	a27
1 1 1 0 0	a28
1 1 1 0 1	a29
1 1 1 1 0	a30
1 1 1 1 1	a31

Mapa de Karnaugh

x4 = 0

	X1 x0			
x3 x2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	a0	a1	A3	a2
0 1	a4	a5	A7	a6
1 1	a12	a13	a15	a14
1 0	a8	a9	a11	a10

x4 = 1

	x1 x0			
x3 x2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	a16	a17	a19	a18
0 1	a20	a21	a23	a22
1 1	a28	a29	a31	a30
1 0	a24	a25	a27	a26

6.2.5 Simplificación de F.C.S.P.

Es posible simplificar dos términos de una expresión si ambos términos difieren en la ocurrencia de una variable, de acuerdo al siguiente teorema:

$$a * b + a * \overline{b} = a * (b + \overline{b}) = a * 1 = a$$

$a * b$ y $a * \overline{b}$ difieren en la ocurrencia de la variable b.

De acuerdo al ordenamiento del mapa de Karnaugh se aprecia que 2 celdas contiguas son lógicamente adyacentes, es decir, difieren en la ocurrencia de una variable, luego estas celdas pueden ser simplificadas.

$$f(x,y,z,w) = \overline{x}\, y\, \overline{z}\, w + \overline{x}\, y\, z\, w$$

Los términos de la función anterior difieren en la ocurrencia de $\overline{z}$ y z.

Mapa de Karnaugh f(x,y,z,w)

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1		1	1	
1 1				
1 0				

$$f(x,y,z,w) = \overline{x}\, y\, \overline{z}\, w + \overline{x}\, y\, z\, w = \overline{x}\, y\, w\, (\overline{z} + z) = \overline{x}\, y\, w$$

Se entiende como subcubo de miniterminos a 2^p campos de valor 1, donde cada campo es lógicamente adyacente a otros p campos en el mapa de Karnaugh.

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0		1		
0 1		1		
1 1		1		
10		1		

$\bar{z}$ **w**

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1			1
0 1				
1 1				
10	1			1

$\bar{y}$ $\bar{w}$

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0		1	1	
0 1		1	1	
1 1		1	1	
10		1	1	

w

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1		1	1	
1 1				
10				

$\bar{x}$ **y w**

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1		1	1	
1 1		1	1	
10				

y w

	z w			
x y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1			1	
1 1				
10				

$\bar{x}$ **y z w**

Procedimiento de reducción

1.- Representar la función en el mapa de Karnaugh a través de sus miniterminos que tienen como ai = 1.

2.- Encontrar la mínima cantidad de subcubos de miniterminos, cada subcubo lo más grande posible.

3.- Escribir todas las expresiones que representan a los subcubos encontrados como sumatoria.

6.2.6 Simplificación de funciones de más de cinco variables con uso de un mapa.

Si se desea simplificar expresiones de conmutación de más de cinco variables, es necesario como mínimo 2 mapas de Karnaugh. En efecto si se tienen 5 variables se necesitan 2 mapas de 4 variables cada uno, si se tienen 6 variables se requieren 4 mapas de 4 variables cada uno.

Es posible simplificar expresiones de 5 variables utilizando un solo mapa. Para ello, es necesario que las entradas al mapa estén en un código adyacente, de manera que las celdas contiguas sean lógicamente adyacentes y se puedan agrupar en subcubos.

Si son 5 variables, es usual ubicar 3 variables en las columnas y 2 variables en las filas. El código adyacente utilizado es el que sigue:

0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

Luego para una función f(x4,x3,x2,x1.x0) el mapa a utilizar es:

	x2 x1 x0							
x4 x3	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 0 0
0 0								
0 1								
1 1								
1 0								

Si se utiliza la configuración anterior, se da el caso que existen celdas no contigüas que son lógicamente adyacentes. Por ejemplo: la celda (x4 x3 x2 x1 x0) = (0 1 0 0 1), es lógicamente adyacente a todas las celdas marcadas con x.

	x2 x1 x0							
x4 x3	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 0 0
0 0		x						
0 1	x	1	x				**x**	
1 1		x						
1 0								

La celda que contiene una **x** (x en negrilla) es lógicamente adyacente a la celda que contiene un 1, pero no es contigua.

En el mapa anterior vamos a encontrar los siguientes tipos de subcubos.

(Subcubo de 2 variables: 1 variables es adyacente a 1)

	x2 x1 x0							
x4 x3	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 0 0
0 0								
0 1		**1**					**1**	
1 1								
1 0								

(Subcubo de 4 variables: 1 variables es adyacente a 2)

	x2 x1 x0							
x4 x3	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 0 0
0 0	**1**							**1**
0 1								
1 1								
1 0	**1**							**1**

(Subcubo de 4 variables: 1 variables es adyacente a 2)

	x2 x1 x0							
x4 x3	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 0 0
0 0								
0 1				**1**	**1**			
1 1				**1**	**1**			
1 0								

(Subcubo de 8 variables: 1 variables es adyacente a 3)

	x2 x1 x0							
x4 x3	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 1 0	1 1 1	1 0 1	1 0 0
0 0								
0 1		**1**	**1**			**1**	**1**	
1 1		**1**	**1**			**1**	**1**	
1 0								